УДК 621.391.519.7

В.Г. Иванов

ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХААРА

Развитие методов и средств цифровой обработки сигналов уже долгое время опирается на эффективные возможности и свойства различных ортогональных преобразований, в том числе используются и системы кусочно-постоянных функций базиса Хаара, который служит основой современных математических методов вейвлет-анализа.

В данной работе объединены и систематизированы результаты формального описания дискретных преобразований Хаара, полученные автором ранее в работах [1–3] и позволяющие реализовать на практике эффективные алгоритмы вычислений при любой размерности вектора сигнала или спектра.

Известно, что спектральная сложность преобразований Хаара зависит от способов формирования слабозаполненных матриц, входящих в процедуры вычисления коэффициентов, и от способов разложения числа N, представляющего собой количество входных отсчетов сигнала, на множители [4, 5].

Так, оценки количества арифметических операций для различных N могут иметь вид

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \prod_{l=i+1}^{n} r_l \quad \forall N = r_1 r_2 \ldots r_n; \tag{1}$$

$$Q_2 = r^2 (r^n - 1)/(r-1) \quad \forall N = r^n, \quad r \geq 3; \tag{2}$$

$$Q_3 = 2(2^n - 1) \;\forall N = 2^n. \tag{3}$$

Основной недостаток вычислительных схем, приведенных в [4, 5], заключается в том, что с изменением N матрицы преобразования Хаара следует пересчитывать, что влечет за собой изменение структуры вычислительной программы или устройства спектрального анализа. Отсутствует также возможность вычислений для N простого.

Ниже приводятся выкладки и рассуждения, позволяющие устранить отмеченные недостатки, причем преобразование Хаара выполняется для любого N.

Известно [6], что если количество дискретных отсчетов сигнала равно четырем, то для нахождения коэффициентов Хаара можно записать систему уравнений

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = d_1; \quad C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2; \\ &C_1 - C_2 + C_4\sqrt{2} = d_3; \quad C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4, \end{aligned} \tag{4}$$

где $d_1, \ldots, d_4$ — значения сигнала в дискретных точках; $C_1, \ldots, C_4$ — коэффициенты Хаара.

При добавлении пятого отсчета сигнала d_5 первое уравнение системы (4) разбивается на два:

$$C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1; \quad C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5. \tag{5}$$

© В.Г. ИВАНОВ, 2003

ISSN 0572-2691

Вычитая одно уравнение из другого, определим C_5 и подставим его значение, равное $(d_1 - d_5)/4$, в (5). После несложных преобразований система (5) сводится к двум уравнениям с одинаковыми правыми частями

$$C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = (d_1 + d_5)/2;\ C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = (d_1 + d_5)/2, \tag{6}$$

которые могут быть заменены одним, аналогичным первому уравнению в (4) с правой частью $d^{(1)}$, равной $(d_1 + d_5)/2$. Таким образом, снова получаем систему из четырех уравнений

$$\begin{gathered} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = d^{(1)};\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2; \\ C_1 - C_2 + C_4\sqrt{2} = d_3;\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4. \end{gathered} \tag{7}$$

Решив (7), найдем коэффициенты Хаара в виде

$$\begin{gathered} C_5 = (d_1 - d_5)/4;\ C_4 = (d_3 - d_4)/2\sqrt{2};\ C_3 = (d_1 + d_5 - 2d_2)/4\sqrt{2}; \\ C_2 = (d_1 + d_5 + 2(d_2 - d_3 - d_4))/8;\ C_1 = (d_1 + d_3 + 2(d_2 + d_3 + d_4))/8. \end{gathered} \tag{8}$$

В случае шести отсчетов сигнала также имеем систему из четырех уравнений

$$\begin{gathered} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = d^{(1)};\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d^{(2)}; \\ C_1 - C_2 + C_4\sqrt{2} = d_3;\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4, \end{gathered} \tag{9}$$

где $d^{(1)} = (d_1 + d_5)/2$; $d^{(2)} = (d_1 + d_6)/2$ и т.д. до поступления $(2N - 1)$-го дискретного значения сигнала.

Построим общую аналитическую форму получения коэффициентов Хаара, аналогичную (8), но позволяющую существенно сократить объем вычислений.

Введем понятие базового вектора данных N^*, который определим по отношению к числу исходных входных отсчетов сигнала N:

$$N^* = 2^n, \tag{10}$$

где $n = 1, 2,\ldots$ $(2^n < N)$, причем n должно давать $\min E\,(N/2^n)$; $E(\bullet)$ — целая часть.

Тогда, в свою очередь, базовые исходные отсчеты сигнала x^* будут формироваться из начальных входных отсчетов по правилу

$$\begin{gathered} x_p^* = (x_p + x_{N^*+p})/2,\ \text{если}\ p = 1, 2, \ldots, (N - N^*); \\ x_p^* = x_p,\ \text{если}\ p = (N - N^* + 1),\ (N - N^* + 2), \ldots, N^*. \end{gathered} \tag{11}$$

С учетом ограничений на объем вычислительных затрат запишем обобщенные промежуточные суммы преобразования Хаара [1] в виде

$$x_i^n = \sum_{k=2i-1}^{2i} x_k^{n-1}, \tag{12}$$

где $n = 1, 2, \ldots, (\log N - 1)$; $i = 1, 2, \ldots, N^*/2^n$; x_k^0 — базовые отсчеты сигнала x_p^*.

Вычислив (12), определяем коэффициенты Хаара

$$C_{mj} = 2^{(m-1)/2} / N * [x_k^{(\log N - 1) - m} - x_{k+1}^{(\log N - 1) - m}], \tag{13}$$

где $m = 1, 2, \ldots, \log N$; $j = 2^{m-1}$, а для выражения, стоящего в квадратных скобках, $m = m - 1$, $k = 2j - 1$. С учетом принятой индексации коэффициент C_{01} (свободный член) записываем так:

$$C_{01} = 1/N^*[x_k^{\log N-1} + x_{k+1}^{\log N-1}]. \tag{14}$$

Остальные коэффициенты определяем по формуле

$$C_{N^*+i} = (x_i - x_{N^*+1})/N^*, \quad i = 1, 2, \ldots, (N - N^*), \tag{15}$$

$x(\bullet)$ — исходные отсчеты сигнала.

Выражения (10)–(15) описывают вычислительные процедуры алгоритма быстрого дискретного преобразования Хаара и позволяют избежать ограничений, накладываемых на количество исходных входных отсчетов сигнала, которое может выражаться как составным, так и простым числом. Количество операций типа сложения–вычитания этого алгоритма равно $2(N-1)$, что существенно меньше вычислений, требующихся в ранее известных алгоритмах, когда $N = r_1 r_2 \ldots r_n$ и $N = r_n$, $r \geq 3$.

Так, при $N = 9$ и $N = 10$ объем вычислений по (12)–(15) составит соответственно 16 и 18 арифметических операций, а известные алгоритмы (2) и (1) потребуют 36 и 45 арифметических операций.

Пример. Пусть заданы пять ($N = 5$) дискретных отсчетов сигнала $x_1 \ldots x_5$. По формуле (10) определим базовый вектор, который в данном случае равен четырем: $N^* = 2^2 < N$.

Базовые отсчеты сигнала формируем по правилу (11): $x_p^* = (x_p + x_{N^*+p})/2 = x_1^* = (x_1 + x_{4+1})/2$, так как $p = N - N^* = 1$; остальные значения сигнала остаются без изменения. Используя (12), вычисляем промежуточные суммы $x_1^1 = x_1^0 + x_2^0 = x_1^* + x_2^0 = (x_1^0 + x_5^0)/2 + x_2^0; x_2^1 = x_3^0 + x_4^0$ и подставляем их в (13), (14); получаем коэффициенты Хаара:

$$C_{11} = C_2 = 2^{(m-1)/2}/N^*[x_1^1 - x_2^1] = (x_1 + x_5 + 2(x_2 - x_3 - x_4))/8;$$

$$C_{21} = C_3 = \sqrt{2}/N^*[x_1^0 - x_2^0] = (x_1 + x_5 - 2x_2)/4\sqrt{2};$$

$$C_{22} = C_4 = (\sqrt{2}/N^*)(x_3^0 - x_4^0) = (x_3 - x_4)/2\sqrt{2}; \tag{16}$$

$$C_{N^*+i} = C_5 = (x_1 - x_5)/4;$$

$$C_{01} = C_1 = (x_1 + x_5 + 2(x_2 + x_3 + x_4))/8.$$

Эти коэффициенты совпадают с (8), причем для их получения требуется меньшее количество вычислительных операций, равное $2(N-1) = 8$.

Синтез сигналов в системе дискретных базисных функций Хаара заключается в вычислении i-го отсчета функции в дискретной точке по выражению

$$P_i(x) = C_0 + \sum_{m=1}^{\log N} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} C_{mj}\chi_{mj}(x), \tag{17}$$

где C_{mj} — коэффициенты; χ_{mj} — функции; N — размерность базиса Хаара.

Используя равенство $k = 2^{m-1}$, перейдем в выражении (17) от двойной нумерации коэффициентов и функций Хаара к простой и запишем систему уравнений для нахождения коэффициентов Хаара или дискретных значений сигнала при $N = 4$:

$$C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = d_1;\; C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2;$$
$$C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3;\; C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4; \tag{18}$$

здесь $d_1,\ldots,d_4$ — значения сигнала в дискретных точках; $C_1,\ldots,C_4$ — коэффициенты Хаара.

При добавлении пятого отсчета сигнала d_5 первое уравнение системы (18) разбивается на два:

$$C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1;\; C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5. \tag{19}$$

Добавление шестого отсчета сигнала d_6 разбивает соответственно второе уравнение системы (18) на два:

$$C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} + 2C_6 = d_2;\; C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} - 2C_6 = d_6. \tag{20}$$

Таким образом, системы уравнений при $N = 5$ и при $N = 6$ будут выглядеть следующим образом:

$$(C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1)M, \quad \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1 \\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} + 2C_6 = d_2 \end{pmatrix} M,$$
$$\begin{pmatrix} C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4 \end{pmatrix} Y, \quad \begin{pmatrix} C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4 \end{pmatrix} Y, \tag{21}$$
$$(C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5)M, \quad \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5 \\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} - 2C_6 = d_6 \end{pmatrix} M;$$

смысл символов M и Y поясняется далее.

Введем понятие первого базового вектора данных N_1^*, который определим по отношению к количеству исходных входных отсчетов сигнала N как

$$N_1^* = 2^n, \tag{22}$$

где $n = 1, 2,\ldots, (2^n < N)$, причем n должно давать $\min E\,(N/2^n)$; $E(\bullet)$ означает целую часть выражения, стоящего в скобках.

Второй базовый вектор N_2^* равен удвоенному значению полученного N_1^*, т.е. $N_2^* = 2N_1^*$.

Анализ систем (21) показывает, что уравнения, определяющие исходные отсчеты сигнала, представляют собой две группы: M — считаются по формулам обратного преобразования для базового вектора N_2^*; Y — по соответствующим формулам для базового вектора N_1^*.

Значения M и Y определим выражениями

$$Y = N_2^* - N;\quad M = N - Y. \tag{23}$$

Изобразим в виде строк матрицы значения совпадающих восстановленных отсчетов при добавлении пятого, шестого, седьмого и восьмого отсчетов соответственно:

$$d_1\, d_2\, a_3\, a_4\, d_5\, d_6\, d_7\, d_8 \quad (N=8),$$

$$d_1\, d_5\, d_2\, d_6\, d_5\, d_3\, d_7 \quad (N=7),$$

$$d_1\, d_5\, d_2\, d_6 \quad (N=6), \tag{24}$$

$$d_1\, d_5 \quad (N=5)$$

(между элементами верхней строки этой матрицы и соответствующими элементами нижних строк предполагается знак равенства). Перегруппируем элементы строк матрицы следующим образом:

для $N=7$ — $\begin{vmatrix} d_1 d_3 d_5 d_2 d_4 d_6 d_7 d_8 \\ d_1 d_2 d_3 d_5 d_6 d_7 \end{vmatrix}$, для $N=6$ — $\begin{vmatrix} d_1 d_3 d_2 d_4 \\ d_1 d_2 d_5 d_6 \end{vmatrix}$, для $N=5$ — $\begin{vmatrix} d_1 d_2 \\ d_1 d_5 \end{vmatrix}$.

Тогда можно записать формулу, в соответствии с которой по N_2^* вычисляются отсчеты

$$P_j,\ j=1, 2,\dots, k^*;\ \ k^*+Y+1,\dots, N;\ \ k^* = M/2. \tag{25}$$

По N_1^* вычисляются отсчеты

$$P_j,\ j=(k^*+1),\dots,(k^*+Y). \tag{26}$$

Для формул обратного преобразования Хаара, когда N кратно степени 2, значение соответствующих индексов i вычисляется так:

$$i=2j-1,\ \ j=1, 2,\dots, k^*;$$

$$i=2j-N_2^*,\ \ \ j=(k^*+Y+1),\dots, N. \tag{27}$$

Таким образом, формулы синтеза исходных отсчетов сигнала записываются в виде

$$P_i^j = A_{l+q} + C_{k+q}(-1)^{i+1},\ \ k=2^{(\log N-1)}+1, \tag{28}$$

индексы i и j определяют соответствие значений отсчетов обычных преобразований (индекс i) и случай, когда количество входных отсчетов принимает любое значение (индекс j).

Выполним все необходимые предварительные вычисления для реализации быстрого алгоритма [1]. Для этого запишем промежуточные обобщенные суммы A_i в виде

$$A_i = C_0 + C_2(-1)^i,\ \ i=0, 1;$$

$$A_i = A_{k-3} + C_k(-1)^i,\ \ i=2, 3,\dots,(N-4),\ \ k=E(i/2)+2. \tag{29}$$

Соответственно для выражения (28)

$$l=\left(\frac{N}{2}-2\right);\ \ \ q=E\left(\frac{i+1}{2}\right)-1. \tag{30}$$

В свою очередь, коэффициенты должны быть C_k-нормированы:

$$C_k = C_k 2^{(m-1)/2}, \tag{31}$$

где $m=2, 3,\dots,(\log N)$; $k=(2^{m-1}+1),\dots,2^m$.

 ISSN 0572-2691

Пример. Пусть количество входных отсчетов сигнала и соответственно количество коэффициентов Хаара равно 6, т.е. $N = 6$.

1. Определим первый базовый вектор как $N_1^* = 2^2 = 4$, так как $\min E(N/2^n)$ дает $n = 2$. Второй базовый вектор равен $N_2^* = 2N_1^* = 8$.

2. Вычислим

$$Y = N_2^* - N = 8 - 6 = 2;\ M = N - Y = 6 - 2 = 4;\ k^* = M/2 = 2.$$

Таким образом, по N_2^* вычисляются отсчеты P_j, где $j = 1, 2, \ldots, k^*, (k^* + Y + 1), \ldots, N$, т.е. $j = 1, 2, 5, 6$.

По N_1^* рассчитываются P_j, где $j = (k^* + 1), \ldots, (k^* + Y)$, следовательно $j = 3, 4$.

Выполним все необходимые промежуточные вычисления с целью получения быстрого обратного преобразования для N_2^*, т.е. для восьми точек:

$$C_0 + C_2 = A_0,\ C_0 - C_2 = A_1,$$

так как $A_i = C_0 + C_2(-1)^i$, где $i = 0, 1$;

$$C_k = C_k 2^{(m-1)/2},$$

где $m = 2$; $k = 3, 4$, т.е.

$$C_3 = C_3\sqrt{2},\ C_4 = C_4\sqrt{2},\ C_5 = C_5^* 2,\ C_6 = C_6^* 2,\ \ m = 3;\ k = 5, 6, 7, 8;$$

$$A_i = A_{k-3} + C_k(-1)^i,\ i = 2, 3, \ldots, (N-4),\ k = E(i/2) + 2;$$

$$A_2 = A_{3-3} + C_3(-1)^2 = A_0 + C_3 = C_0 + C_2 + C_3,$$

$$A_3 = A_{3-3} + C_3(-1)^3 = A_0 - C_3 = C_0 + C_2 - C_3,$$

$$A_4 = A_{4-3} + C_4(-1)^4 = A_1 + C_4 = C_0 - C_2 + C_4.$$

Восстановленное значение сигнала в первой точке будет таким:

$$P_i^j = A_{l+q} + C_{k+q}(-1)^{i+1},$$

причем $i = 2j - 1$, когда $j = 1, 2, \ldots, k^*$; $i = 2j - N_2^*$, когда $j = (k^* + Y + 1), \ldots, N$;

$$P_1^1 = A_{2+0} + C_{5+0}(-1)^2 = A_2 + C_5 = C_0 + C_2 + C_3 + C_5,$$

так как $l = (8/2 - 2)$,

$$q = E((1 + 1)/2) - 1 = 0,\ k = 2^{(\log N - 1)} + 1 = 5.$$

Если $j = 2$, то $i = 3$ и соответственно

$$P_3^2 = A_{2+1} + C_{5+1}(-1)^{3+1} = A_3 + C_6 = A_0 - C_3 + C_6 = C_0 + C_2 + C_3 + C_6.$$

Когда $j = 5$, то $i = 2$ и

$$P_2^5 = A_{2+0} + C_{5+0}(-1)^{2+1} = A_2 - C_5 = A_0 + C_3 - C_5 = C_0 + C_2 + C_3 - C_5.$$

При $j = 6$ будет $i = 4$, а значение восстановленной точки —

$$P_4^6 = A_{2+1} + C_{5+1}(-1)^{(4+1)} = A_3 - C_6 = A_0 - C_3 - C_6 = C_0 + C_2 - C_3 - C_6.$$

По N_1^* вычисляются P_j, $j = 3, 4$, т.е. необходимо выполнить обратное преобразование Хаара для четырех точек и взять восстановленное значение только в точках 3 и 4.

В приведенном примере значения восстановленных отсчетов полностью соответствуют значениям правой части системы уравнений (21).

Таким образом, полученные выражения для быстрых дискретных преобразований Хаара существенно упрощают анализ и синтез сигналов с применением ЭВМ, позволяют исследовать поведение спектров сигналов для различных объемов выборки дискретных отсчетов без предварительного генерирования матрицы базисных функций и дают возможность не накладывать ограничения на количество входных отсчетов сигнала, которое может быть как составным, так и простым числом.

Использование этих соотношений открывает возможности построения специализированных процессоров быстрых преобразований Хаара, структура которых инвариантна относительно длины обрабатываемой реализации.

В.Г. Іванов

ФОРМАЛЬНИЙ ОПИС ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ХААРА

Поєднано і систематизовано результати формального опису дискретних перетворень Хаара, що дозволяють реалізувати на практиці ефективні алгоритми швидких обчислень при будь-яких значеннях розмірності вектора вихідних відліків або сигналу спектру.

V.G. Ivanov

THE FORMAL DESCRIPTION OF DISCRETE HAARA TRANSFORMATIONS

Results of the formal description of the discrete Haara transformations are united and systematized, allowing to realize in practice effective algorithms of fast calculations at any values of dimension of a vector of initial readout of a signal or a spectrum.

1. *Иванов В.Г.* Эффективность анализа и синтеза в дискретном базисе Хаара // Радиоэлектроника : Изв. высш. учеб. заведений. — 1983. — № 9. — С. 54–56.
2. *Иванов В.Г.* Преобразование Хаара для произвольного числа точек // Там же. — 1989. — № 7. — С. 41–45.
3. *Иванов В.Г.* Синтез сигналов рядами Хаара произвольной размерности // Там же. — 2001. — № 4. — С. 70–73.
4. *Карповский М.Г., Москалев Э.С.* Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. — Л. : Энергия, 1973. — 141 с.
5. *Многозначные* элементы, структуры, системы : Сб. научн. тр. — Киев : Наук. думка, 1983. — 144 с.
6. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. — М. : Физматгиз, 1957. — 507 с.

Получено 28.03.2003