УДК 621. 391.519.7

ИВАНОВ В. Г.

СИНТЕЗ СИГНАЛОВ РЯДАМИ ХААРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Получены соотношения для быстрых обратных преобразований Хаара, не зависящих от способов разложения числа вводных отсчетов сигнала на множители, которое может быть как составным так и простым числом.

Современные эффективные алгоритмы сжатия данных базируются в основном на методах вейвлет-преобразований, основу которых составляет классический ортогональный базис Хаара [1]. Поэтому развитие теории и практики анализа и синтеза сигналов в обобщенной системе кусочно-постоянных функций базиса Хаара является актуальным.

Известны эффективные методы анализа и синтеза сигналов в дискретном базисе Хаара, позволяющие существенно уменьшить число вычислительных операций для прямых и обратных преобразований [2]. Однако число входных отсчетов сигнала при этом должно быть кратно целой степени числа 2, что снижает функциональные возможности таких преобразований. В [3] получены формулы, позволяющие осуществлять быстрое прямое дискретное преобразование Хаара, не накладывая ограничений на число входных отсчетов сигнала, которое может быть как составным, так и простым числом. Покажем, что эти ограничения также могут быть сняты для формул быстрого обратного преобразования.

Синтез сигналов в системе дискретных базисных функций Хаара заключается в вычислении i-го отсчета функции в дискретной точке по выражению

$$P_i(x) = C_0 + \sum_{m=1}^{\log N} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} C_{mj} \chi_{mj}(x)\,, \qquad (1)$$

где C_{mj} — коэффициенты; X_{mj} — функции, а N — размерность базиса Хаара.

Используя равенство $k = 2^{m-1}$, перейдем в выражении (1) от двойной нумерации коэффициентов в функций Хаара к простой и запишем систему уравнений для нахождения коэффициентов Хаара или дискретных значений сигнала при $N = 4$:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} = d_1\,, \qquad C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2\,, \\ &C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3\,, \qquad C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4, \end{aligned} \qquad (2)$$

где d_1, …, d_4 — значения сигнала в дискретных точках; C_1 , … , C_4 — коэффициенты Хаара.

При добавлении отсчета сигнала d_5 первое уравнение системы (2) разбивается на два: $C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1$, $C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5$. Добавление отсчета сигнала d_6 разбивает соответственно второе уравнение системы (2) на два: $C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} + 2C_6 = d_2$, $C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} - 2C_6 = d_6$.

Таким образом, системы уравнений при $N = 5$ и при $N = 6$ будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} < C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1 > M \\ \begin{pmatrix} C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} = d_2 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_5 \end{pmatrix} Y \\ < C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5 > M \end{cases} \qquad \begin{cases} \left\langle \begin{matrix} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} + 2C_5 = d_1 \\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} + 2C_6 = d_2 \end{matrix} \right\rangle M \\ \begin{pmatrix} C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_3 \\ C_1 - C_2 - C_4\sqrt{2} = d_4 \end{pmatrix} Y \\ \left\langle \begin{matrix} C_1 + C_2 + C_3\sqrt{2} - 2C_5 = d_5 \\ C_1 + C_2 - C_3\sqrt{2} - 2C_6 = d_6 \end{matrix} \right\rangle M \end{cases} . \quad (3)$$

Введем понятие первого базового вектора данных N_1^*, определив его по отношению к числу N исходных входных отсчетов сигнала как $N_1^* = 2^n$, где $n = 1, 2, \ldots (2^n < N)$, причем n должно давать min Ц $(N/2^n)$; Ц $(\cdot)$ — целая часть выражения в скобках. Второй базовый вектор $N_2^* = 2N_1^*$ равен удвоенному значению первого.

Анализ систем (3) показывает, что число уравнений, определяющих исходные отсчеты сигнала, представляют собой две группы: M вычисляются по формулам обратного преобразования для базового вектора N_2^* и Y, которые определяются по соответствующим формулам для базового вектора N_1^*. Значения M и Y определим как $Y = N_2^* - N$, $M = N - Y$.

Изобразим в виде строк матрицы значения совпадающих восстановленных отсчетов при добавлении пятого, шестого, седьмого и восьмого отсчета соответственно:

$$\begin{gathered} d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ d_6\ d_7\ d_8 \quad (N = 8), \\ d_1\ d_5\ d_2\ d_6\ d_5\ d_3\ d_7 \quad (N = 7), \\ d_1\ d_5\ d_2\ d_6\ (N = 6), \\ d_1\ d_5 \quad (N = 5). \end{gathered}$$

Между элементами верхней строки этой матрицы и соответствующими элементами нижних строк стоит знак равенства. Перегруппируем элементы строк матрицы следующим образом:

для $N = 7$	$d_1\ d_2\ d_3\ d_5\ d_2\ d_4\ d_6\ d_7\ d_8$,	$d_1\ d_2\ d_3\ d_5\ d_6\ d_7$,
для $N = 6$	$d_1\ d_3\ d_2\ d_4$,	$d_1\ d_2\ d_5\ d_6$
и для $N = 5$	$d_1\ d_2$,	$d_1\ d_5$.

Тогда можно записать формулу, по которой по N_2^* считаются отсчеты, P_j, где $j = 1,2, \ldots, k^*, k^* + Y + 1, \ldots, N$, а $k^* = M/2$.

Формула, по которой по N^*_1 считаются отсчеты P_j имеет вид: P_j,

где $j = (k^* + 1),\ldots, (k^* + Y)$.

Для формул обратного преобразования Хаара, когда N кратно степени два, значение соответствующих индексов i вычисляется как:

$$i = 2j - 1, \text{ где } j = 1, 2, \ldots, k^* \text{ и } i = 2j - N_2^*, \text{ когда } j = (k^* + Y + 1), \ldots, N. \quad (4)$$

Таким образом формулы синтеза исходных отсчетов сигнала запишутся в виде:

$$P_i^j = A_{l+Q} + C_{k+Q}(-1)^{i+1}, \quad k = 2^{(\log N - 1)} + 1),$$

а индексы i и j определяют соответствие значений отсчетов обычных преобразований (индекс i) и когда число входных отсчетов принимает любое значение (индекс j).

Выполним все необходимые предварительные вычисления для реализации быстрого алгоритма [4]. Для этого запишем промежуточные обобщенные суммы A_i в виде:

$$A_i = C_0 + C_2(-1)^i, \text{ где } i = 0, 1,$$
$$A_i = A_{k-3} + C_k(-1), \text{ где } i = 2, 3, \ldots, (N-4), k = Ц(i/2) + 2.$$

Соответственно для выражения (4) должно быть: $l = (N/2 - 2)$; $Q = Ц((i + 1)/2) - 1$. В свою очередь коэффициенты должны быть C_k нормированы, т. е.

$$C_k = C_k \, 2^{\frac{m-1}{2}},$$

где $m = 2, 3, \ldots, (\log N)$, а $k = (2^{m-1} + 1), \ldots, 2^m$.

Пример. Пусть число входных отсчетов сигнала и, соответственно, число коэффициентов Хаара $N = 6$.

1. Определим первый базовый вектор как $N_1^* = 2^2 = 4$, т.к. $\min Ц(N/2^n)$ дает $n = 2$. Второй базовый вектор $N_2^* = 2N_1^* = 8$.

2. Вычислим $Y = N_2^* - N = 8 - 6 = 2$; $M = N - Y = 6 - 2 = 4$; $k^* = M/2 = 2$. Таким образом по N_2^* считаются отсчеты P_j, где $j = 1, 2, \ldots k^*, (k^* + Y + 1), \ldots, N$ т.е. $j = 1, 2, 5, 6$. По N_1^* считаются P_j, где $j = (k^* + 1), \ldots, (k^* + Y)$, т.е. $j = 3, 4$.

Выполним все необходимые промежуточные вычисления для быстрого обратного преобразования для N_2^*, т. е. для восьми точек.

$C_0 + C_2 = A_0$ и $C_0 - C_2 = A_1$, т. к. $A_i = C_0 + C_2(-1)^i$, где $i = 0, 1$.

$C_k = C_k$, где $m = 2$, а $k = 3, 4$, т. е.

$C_3 = C_3\sqrt{2}$; $C_4 = C_4\sqrt{2}$; $C_5 + C_5{*}2$ и $C_6 + C_6{*}2$, где $m = 3$, а $k = 5, 6, 7, 8$.

$A_i = A_{k-3} + C_k(-1)^i$, где $i = 2,3, \ldots, (N-4)$, $k = Ц(i/2) + 2$,

$A_2 = A_{3-3} + C_3(-1)^2 = A_0 + C_3 = C_0 + C_2 + C_3$.

$A_3 = A_{3-3} + C_3(-1)^3 = A_0 - C_3 = C_0 + C_2 - C_3$.

$A_4 = A_{4-3} + C_4(-1)^4 = A_1 + C_4 = C_0 - C_2 + C_4$.

Восстановленное значение сигнала в первой точке будет равно:

$P_i^j = A_{l+Q} + C_{k+Q}(-1)^{i+1}$, причем $i = 2j - 1$, когда $j = 1, 2, \ldots, k^*$ и $i = 2 - N_2^*$, когда $j = (k^* + Y + 1), \ldots, N$.

$P_1^1 = A_{2+0} + C_{5+0}(-1)^2 = A_2 + C_5 = C_0 + C_2 + C_3 + C_5$, т.к. $l = (8/2 - 2)$,

$Q = Ц\,((1+1)/2) - 1 = 0, \quad k = 2^{(\log N - 1)} + 1 = 5$.

Если $j = 2$, то $i = 3$ и соответственно $P_3^2 = A_{2+1} + C_{5+1}(-1)^{3+1} = A_3 + C_6 = A_0 - C_3 + C_6 = C_0 + C_2 + C_3 + C_6$.

Когда $j = 5$, то $i = 2$ и, соответственно, $P_2^5 = A_{2+0} + C_{5+0}(-1)^{2+1} = A_2 - C_5 = A_0 + C_3 - C_5 = C_0 + C_2 + C_3 - C_5$.

При $j = 6$, $i = 4$ и значение восстановленной точки равно $P_4^6 = A_{2+1} + C_5 + 1(-1)^{(4+1)} = A_3 - C_6 = A_0 - C_3 - C_6 = C_0 + C_2 - C_3 - C_6$.

По N_1^* считаются P_j, где $j = 3, 4$, т.е. необходимо выполнить обратное преобразование Хаара для четырех точек и взять восстановленное значение только в точках 3 и 4.

В приведенном примере значения восстановленных отсчетов полностью соответствуют значениям правой части системы уравнений (3).

Таким образом, полученные в работе выражения позволяют осуществлять быстрое обратное дискретное преобразование Хаара, не накладывая ограничений на число входных отсчетов сигнала, которое может быть как составным, так и простым числом. По существу, эти преобразования реализованы в обобщенной системе Хаара, когда соответствующие двоичные отрезки существования функций Хаара не равны друг другу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Stollnitz Eric I., DeRose Tony, Salesin David H.* Wavelets for Computer Graphics. Theory and Applications. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Francisco, California.— 1996.— P. 181—194.

2. *Иванов В. Г. и др.* Эффективность анализа и синтеза в дискретном базисе Хаара // Радиоэлектроника.— 1983.— № 9.— С. 54—56. (Изв. высш. учеб. заведений).

3. *Иванов В. Г.* Преобразование Хаара для произвольного числа точек // Радиоэлектроника.— 1989.— № 7.— С. 41—45. (Изв. высш. учеб. заведений).

Национальная юридическая академия, г. Харьков. Поступила в редакцию 02.02.2000.