УДК 004.627

В.Г. ИВАНОВ, д-р. техн. наук, проф., ***Ю.В. ЛОМОНОСОВ***, канд. техн. наук, доц., ***М.Г. ЛЮБАРСКИЙ***, д-р физ.-мат. наук, проф., ***М.В. ГВОЗДЕНКО,*** ст. преп., НЮАУ им. Я. Мудрого (г. Харьков)

СИНТЕЗ СИГНАЛОВ РЯДАМИ ХААРА ПРИ ДВОИЧНОМ ЗАДАНИИ АРГУМЕНТОВ

Показано, что на основе объединения свойств быстрых алгоритмов преобразований Хаара и особенностей суммирования рядов Хаара при двоичном задании аргументов восстанавливаемой функции удается получить максимально эффективный в вычислительном отношении алгоритм обработки. Библиогр.: 12 назв.

Ключевые слова: ряды Хаара, синтез сигналов, быстрые алгоритмы, двоичное задание аргументов.

Постановка проблемы и анализ литературы. Современные высокоэффективные алгоритмы обработки сигналов и изображений базаруються, в основном, на методах вейвлет-анализа, среди которых заметное место занимает классический ортогональный базис Хаара [1 – 4]. Функции Хаара, как и функции Уолша относятся к классу кусочно-постоянных функций. Их существенное отличие от функций Уолша, а также и функций базиса Фурье, заключается в том, что они локализованы на отдельных частях изучаемого интервала. Поэтому функции Хаара, которые позволяют оценить локальные свойства исследуемых сигналов, часто называют вейвлетами Хаара [5, 6]. Так же важным свойством системы Хаара является минимальный объем вычислений как для процедуры получения коэффициентов, так и для процедуры суммирования рядов Хаара. Поэтому весьма актуальной является задача исследования вычислительных возможностей системы Хаара при двоично-кодированном задании аргументов и параллельном способе организации вычислений в специализированных процессорах обработки сигналов.

Задачи обработки сигналов и изображений в реальном масштабе времени требуют анализа известных и создания новых методов вычисления различных математических зависимостей для наиболее полного использования широких возможностей современной электронной техники [7 – 10]. Известно много вариантов алгоритмов и устройств обработки сигналов в дискретном базисе Хаара [1, 3, 4, 6]. Основным недостатком таких схем является то, что их архитектура в большинстве случаев неадекватна структуре решаемой задачи или структуре внутренних связей моделируемого процесса, что влечет за собой большой объем вычислений или оборудования.

Цель статьи. Развитие методов преобразований Хаара на основе объединения свойств быстрых алгоритмов Хаара и особенностей суммирования рядов Хаара при двоичном кодировании аргументов восстанавливаемой функции, что позволит получить максимально эффективный в вычислительном отношении алгоритм обработки.

Описание методов. Синтез сигналов в системе дискретных базисных функций Хаара заключается в вычислении i-го отсчета функции в дискретной точке по выражению

$$P_i(x) = C_0 + \sum_{m=1}^{\log N} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} C_{mj} \chi_{mj}(x), \qquad (1)$$

где C_{mj} – коэффициенты; χ_{mj} – функции Хаара.

Число элементарных операций при вычислении $P_j(x)$ по формуле (1) может быть существенно снижено [11].

На основании равенства $k = 2^{m-1}$, перейдем в выражении (1) от двойной нумерации коэффициентов и функций Хаара к простой нумерации. Для удобства примем $N = 8$ и запишем получение сумм A_0 и A_1 в виде

$$C_0 + C_2 = A_0;\ \ C_0 - C_2 = A_1. \qquad (2)$$

A_0 и A_1, найденные по выражениям (2), однозначно определяются независимо от значения N в выражении (1).

Запишем рекуррентные соотношения для A_i с учетом того, что i будет меняться от 2 до $\alpha = 2\ (0{,}5n - 1)$:

$$A_0 + C_3 = A_2;\ \ A_1 + C_4 = A_4; \qquad (3)$$

$$A_0 - C_3 = A_3;\ \ \ \ A_1 - C_4 = A_5.$$

Значения индексов коэффициентов C_k в (3) можно выразить через индексы i обобщенных сумм A_i как k = Ц$(0{,}5i)+2$, а знаки C_k определить выражением $t = (-1)^i$.

Пронормируем коэффициенты C_k в (3) с учетом определения функций Хаара

$$C_k = C_k 2(m - 1)/2, \qquad (4)$$

где $m = 2, 3, \ldots, \log N{-}1$, а $k = 2^{m-1}{+}1, \ldots, 2m$. Тогда выражения для формирования соответствующих сумм A_i в окончательной форме можно записать в виде:

$$A_i = C_0 + C_2(-1)^i,\ \text{где}\ i = 0,\ 1 \qquad (5)$$

и

$$A_i = A_{k-3} + C_k(-1)^i, \qquad (6)$$

где $i = 2, 3, \ldots, 2[(0{,}5n - 1) - 1]$, а коэффициенты C_k и их индексы были определены выше.

Таким образом, в общем виде для ортогонального и нормированного базиса Хаара, формулы синтеза можно записать в виде:

$$P_i(x) = A_{1+Q} + C_{k+Q}(-1)^{i+1} 2^{(\log N-1)/2}, \qquad (7)$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $l = (0{,}5n - 2)$, $Q = Ц[(i+1)/2] - 1$ и $Ц(x)$ – целая часть числа x.

Количество вычислительных операций типа сложения – вычитания по формулам (2), (5), (6) и (7) равно количеству вычислений прямого преобразования и составляет $2(N - 1)$.

Модификация процедур вычисления сумм Хаара в двоичной системе счисления. В цифровых устройствах находит применение известный метод восстановления исходных данных, заключающийся в том, что производят анализ разрядов двоичной записи номера отсчета восстанавливаемой функции и затем суммируют коэффициенты ортогонального преобразования Хаара с соответствующими знаками [2].

Задаваясь коэффициентами Хаара a_{mj} и полагая для простоты $n = 2^{m_0}$, запишем последовательность вычислений в следующем виде

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} a_{mj} \chi_{mj}(x) . \quad (8)$$

Вместо коэффициентов a_{mj} более удобно оперировать с числами $b_{mj} = 2^{\frac{m-1}{2}} a_{mj}$. Тогда (8) можно переписать как

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} b_{mj} \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x) .$$

Из анализа свойств функций Хаара легко видеть, что для каждого фиксированного " x " в этой сумме найдется не более чем m_0 отличных от нуля слагаемых. Действительно, среди отрезков ℓ_{mj} с $1 \le j \le 2^{m-1}$ лишь один содержит точку x. Пусть это будет отрезок $\ell_m, \ j_m(x)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{2^{m-1}} b_{mj} \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x) = b_m, \ j_m(x) \operatorname{sgn} \chi_m, j_m(x)$$

и, следовательно,

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} b_m, j_m(x) \operatorname{sgn} \chi_m, j_m(x) .$$

В [2] утверждается и доказывается следующая теорема.

Если в двоичной системе счисления $x = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s, \ldots$, то

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} (-1)^{\varepsilon_m} b_{m,j_m} , \quad (9)$$

где опять таки в двоичной системе

$$j_m - 1 = \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1} \quad (10)$$

(при $m = 1$ правую часть (10) надо полагать равной нулю).

Здесь все ε_s – двоичные цифры, то есть либо нули, либо единицы. В десятичной системе значение x и формула (10) будут выглядеть так:

$$x = \varepsilon_1 2^{-1} + \varepsilon_2 2^{-2} + \ldots + \varepsilon_s 2^{-s} + \ldots,$$

$$j_m - 1 = \varepsilon_1 2^{m-2} + \varepsilon_2 2^{m-3} + \ldots + \varepsilon_{m-2} 2 + \varepsilon_{m-1}.$$

Из (9) и (10) следует весьма простой способ вычисления $P_n(x)$ на ЭВМ, использующих двоичную систему. Так как аргумент x задается своим двоичным представлением $x = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, то при каждом m легко выделить цифры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$. Для этого нужны только простейшие логические операции. По значениям m и j_m можно сформировать адрес ячейки, содержащей b_{m,j_m}. Если следующая цифра в двоичной записи числа x (то есть ε_2) равна нулю, то в b_{m,j_m} прибавляется к накапливаемой сумме, а если следующая цифра равна 1, то b_{m,j_m} вычитается:

$$z_m - z_{m-1} + (-1)^{\varepsilon_m} b_{m,j_m}, \tag{11}$$

где $m = 1, 2, \ldots, m_0$.

Начав с $z_0 = a_1$, получим $z_{m_0} = P_n(x)$.

Рассмотрим работу алгоритма при восстановлении исходной информации, например, числа 0,010. Присваивая m значение 1 по формуле $j_m = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1} + 1$ вычислим индексы коэффициентов Хаара, которые будут равны

$$j_m = 0 + 1 = 1, \text{ и } b_{m,j_m} = b_{11}.$$

Определим теперь знак этого коэффициента, анализируя первый разряд после запятой в двоичном представлении числа x, и так как он равен 0, коэффициент b_{11} берем со знаком плюс. Аналогично при $m = 2$ и 3 $j_m = 0,\underline{01}0 + 1 = 1$ и $j_m = 0,\underline{01}0 + 1 = 2$ коэффициенты b_{21} и b_{32} суммируются со знаком минус и плюс соответственно. Таким образом, значение исходной функции в точке $x = 0,010$ определяется как

$$P_n(0{,}010) = a_1 + b_{11} - b_{21} + b_{32}. \tag{12}$$

Такой же результат дают обычные вычисления.

В каждом цикле приведенного алгоритма производится одно сложение и несколько логических операций, и общее число вычислений в одной точке стремится к значению двоичного логарифма размерности базиса Хаара, а все время суммирования составит $Q = N \log N$, где N – число дискрет аргумента на единичном интервале.

Недостатком рассмотренного метода является его вычислительная избыточность. Покажем, что объем вычислений при восстановлении исходных данных по коэффициентам Хаара в двоичной системе счисления может быть существенно уменьшен [11, 12].

Для этих целей прежде, чем суммировать коэффициенты Хаара на основании анализа двоичных разрядов в дискретных точках восстановления исходных функций, сформируем суммы следующего вида

$$A_0 = C_0 + C_2;\ \ A_1 = C_0 - C_2;\ A_i = A_{k-3} + C_k(-1)^i, \tag{13}$$

где $i = 2, 3, ..., (N-3)$, $k = Ц(\frac{i}{2}) + 2$.

Тогда суммирование коэффициентов Хаара в каждой точке восстановления можно представить в виде:

$$P_n(x) = A_{j_m} + b_{m,j_m^*}(-1)^{\varepsilon_m}, \tag{14}$$

где $j_m = \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\ \varepsilon_{m-1}+(N/2–2)$ для первого слагаемого, и $j_m^* = \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\ \varepsilon_{m-1}+1$ для второго слагаемого, причем $m = m_0$.

Так в случае, если $N = 8$, то процесс вычислений будет начинаться с определения соответствующих сумм вида:

$$A_0 = C_0 + C_2;\ A_1 = C_0 - C_2;\ A_2 = A_0 + C_3;$$
$$A_3 = A_0 - C_3;\ A_4 = A_1 + C_4;\ A_5 = A_1 - C_4.$$

Затем осуществляется восстановление данных в каждой точке отсчета исходной функции по выражению (14) с учетом того, что первому отсчету соответствует двоичное представление вида 0,000, второму 0,001, третьему 0,010 и т.д. Для точки 0,010 получим: $j_m =$ 0,<u>01</u>0 + 2 = 3 и j^*_m = 0,<u>01</u>0 + 1 = 2.

$P_3(0{,}010) = A_3 + b_{32} = A_0 - C_3 + b_{32} = C_0 + C_2 - C_3 + b_{32}$ или с двоичными индексами, $P_3(0{,}010) = a_1 + b_{11} - b_{21} + b_{32}$.

Значения индексов коэффициентов и их знаков совпадают со значениями, определенными на основе свойств классических функций Хаара, но количество операций типа сложение – вычитание составляет при этом $2(N - 1)$ вместо $N \log_2 N$ известного метода [2].

Выводы. Предложенные аналитические методы синтеза сигналов рядами Хаара на основе объединения свойств быстрых алгоритмов преобразований Хаара и особенностей суммирования коэффициентов этих преобразований при двоичном задании аргументов позволили получить максимально эффективный в вычислительном отношении алгоритм обработки. Полученные выражения характеризуются однотипностью процедур, легко программируются и наиболее приемлимы для разработки вычислительных средств с различным уровнем параллелизма и сложностью вычислительного процесса.

Для процессоров этого типа характерно наличие однотипных модульных локально-связанных процессорных элементов и совмещение в своей архитектуре наиболее мощных принципов параллельной обработки – конвейерного и матричного. Работа таких структур аналогична процессам, происходящим в живом организме: информация в них обрабатывается путем "проталкивания" ее через параллельные магистрали процессорных элементов подобно тому, как сердце перекачивает кровь по системе кровообращения. По аналогии с сердечной систолой, которая используется физиологами для обозначения ритмических регулярных сокращений, процессоры с такой архитектурой получили название систолических.

Список литературы: 1. *Ахмед, Н.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / *Н. Ахмед, К.Р. Рао.* – М.: Связь, 1980. – 248 с. **2**. *Соболь, И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара / *И.М. Соболь.* – М.: Наука, 1970. – 288 с. **3.** *Залманзон Л.А.* Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / *Л.А. Залманзон.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 496 с. **4.** *Миано Дж.* Форматы и алгоритмы сжатия изображений в действии: учеб. пособ. / *Дж. Миано.* – М.: Триумф, 2003. – 336 с. **5.** *Дебеши, И.* Десять лекций по вейвлетам / *И. Дебеши.* – М.: Ижевск, 2001. – 464 с. **6.** *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений / *Р. Гонсалес, Р. Вудс.* – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с. **7.** Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / Под ред. *С. Гуна, Х. Уайтхадса, Т. Кайлата.* – М.: Радио и связь, 1989. – 472 с. **8.** *Труды* Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Цифровая обработка сигналов и ее применение. – М.: Информпресс-94, 2004. – Вып. 4–1. – 317 с. **9.** *Итенберг И.И.* Мультипроцессоры для цифровой обработки изображений в системах реального времени / *И.И. Итенберг* // Известия вузов. Электроника. – М., 2002. – № 4. – С. 71-78. **10.** *Евдокимов, В.Ф.* Параллельные вычислительные структуры на основе разрядных методов вычислений / *В.Ф, Евдокимов, А.И. Стасюк.* – К.: Наук. думка, 1987. – 312 с. **11.** *Іванов В.Г.* Параллельные и последовательные структуры Хаара для цифровой обработки сигналов / *В.Г. Іванов* // Электронное моделирование. – 2005. – № 3. – С. 55-66. **12**. *Іванов В.Г.* Формальное описание дискретных преобразований Хаара / *В.Г. Іванов* // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 5. – С. 68-75.

УДК 004.627

Синтез сигналів рядами Хаара при двійковому завданні аргументів / В.Г. Іванов, Ю.В. Ломоносов, М.Г. Любарський, М.В. Гвозденко // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатики і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2010. – № 31. – С. 100 – 105.

Показано, що на основі об'єднання властивостей швидких алгоритмів перетворень Хаара і особливостей підсумовування рядів Хаара при двійковому завданні аргументів відновлюваній функції вдається отримати максимально ефективний в обчислювальному відношенні алгоритм обробки. Бібліогр.: 12 назв.

Ключові слова: ряди Хаара, синтез сигналів, швидкі алгоритми, двійкове завдання аргументів.

UDC 004.627

Synthesis of signals the rows of Haar at the binary task of arguments / V.G. Ivanov, U.V. Lomonosov, M.G. Lyubarsky, M.V. Gvozdenko // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2010. – №. 31. – P. 100 – 105.

It is rotined that on the basis of association of properties of rapid algorithms of transformations of Haar and features of adding up of rows of Haar at the binary task of arguments a refurbishable function it is succeeded to get the maximally effective in a calculable relation algorithm of treatment .

Keywords: rows of Haar, synthesis of signals, rapid algorithms, binary task of arguments.

Поступила в редакцию 15.05.2010